Рыжик Валерий Идельевич

КОМПЬЮТЕР В РУКАХ УЧИТЕЛЯ ГЕОМЕТРИИ

От редакции: статья основана на стенограмме доклада автора на семинаре по технологии Nspire.

Я убеждён – пройдут годы, может быть, – десятилетия, – и школьное математическое образование благодаря компьютеру станет существенно иным. Ростки этого процесса видны уже сейчас.

Когда в математическом школьном образовании используешь компьютерные программы (а я этим занимаюсь почти 20 лет), то и дело слышишь от коллег нечто вроде: «всё это от лукавого, компьютер не снимает наших преподавательских трудностей, более того – увеличивает их – слишком много надо осваивать». (Здесь и далее я буду говорить «компьютер», а не «компьютерные программы» или «компьютерные инструменты» – для краткости).

Для уверенности в собственных убеждениях нужна платформа. Потому я сформулировал для себя некоторые постулаты.

Перечислю их, сопроводив весьма краткими пояснениями.

1. ПОСТУЛАТЫ

Постулат 1. *Математическое образование школьника – многогранная интеллектуальная деятельность.*

Ей присуща не только логическая культура, но и понимание, сомнение, открытие, а потому – интуиция, пространственное мышление, догадка, смелость мысли… При этом далеко не все дороги ведут к успеху, возможны заблуждения, тупики и, разумеется, ошибки.

Напомню, что в своей основополагающей статье «О геометрии» академик А.Д. Александров говорил, что геометрии, а потому и геометрическому образованию, изначально присущ этакий «треугольник»: логика – воображение – практика. И если из геометрии выкинуть хотя бы одну вершину этого треугольника, то получим искажённый курс геометрии. При этом наиболее значимая вершина в этом «треугольнике» – воображение. И если при изложении предмета надо выбирать между воображением и логикой, то предпочтение надо отдавать сохранности воображения.

Постулат 2. *Математика – наука экспериментальная.*

Эта точка зрения хорошо известна, в частности, её пропагандировал академик В. Арнольд.

Постулат 3. *Компьютер для школьного математического образования – то же, что прибор для физики.*

Тем самым очевидно, что компьютер – прибор, с помощью которого ведётся наблюдение, формируется или проверяется гипотеза.

Компьютер в образовании может трактоваться шире. Поясню один из важнейших аспектов этого расширения.

Принятая в элементарной геометрии аксиоматика возникла из того, что можно сделать циркулем и линейкой, то есть некими инструментами. Понятно, что построения только циркулем или только линейкой приводят к другой аксиоматике.

И если компьютер – инструмент, то можно говорить о той аксиоматике (может быть, упреждая упрёки в недомыслии, «аксиоматике»), которую порождает компьютер. Таковой «аксиоматикой» естественно считать построения, которые «вшиты» в программное обеспечение.

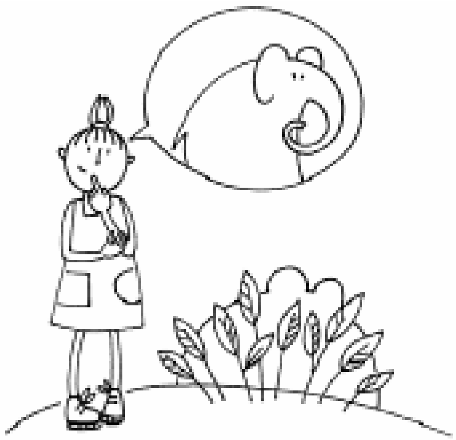
Постулат 4. *Интеллектуальная деятельность школьника разбивается на три составляющие: учебная деятельность, исследовательская деятельность и критическая деятельность.*

Компьютер является подспорьем в каждой такой деятельности.

Исследовательская деятельность включает в себя, в частности, поиск гипотезы; для появления оной необходимы наблюдения, догадки, аналогии, индуктивные предположения, упрощения, обобщения… Увлекателен поиск примеров и контрпримеров.

О критической деятельности скажу чуть подробнее, поскольку выделяю её как самостоятельную. Её характерными проявлениями являются, в частности, *проверка* той или иной гипотезы, оценка различных решений по различным критериям (простота, эстетичность, личные предпочтения), а также оценка самих этих критериев. В критическую деятельность вписывается также и поиск доказательства, если трактовать доказательство как один из видов проверки гипотезы. (Вспомним К. Гаусса, который сетовал на то, что не может в иных случаях доказать то, что давно знает!) Само понятие доказательства не формализуемо, оно, как считает логик В. Успенский (не только он), есть «убедительство». Главное в доказательстве – убедить, убедить настолько, чтобы созрела готовность убеждать таким же способом.

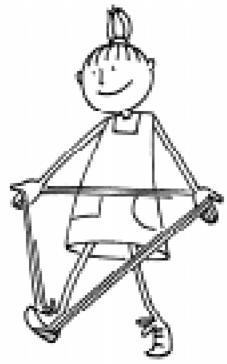
Потому и существуют разные способы (уровни) доказательства. Строгость в доказательстве – не самоцель, а всего лишь средство для убеждения, зависит от того, кого убеждаем и с какой целью. В школе требуется убедить ученика, который заведомо склонен верить учителю, учебнику…Один из способов доказательства – ссылка на компьютер. Если нет сомнений в результатах, которые получены с его помощью (а сомнения, в принципе, возможны, об этом буду говорить позже), то мы имеем доказательство.



Исследовательская деятельность включает в себя, в частности, поиск гипотезы...

В школьном математическом образовании такая точка зрения воспринимается учениками «на ура». Один только пример: если компьютер показывает, что сумма углов треугольника равна 180 градусам, как ни гоняй его вершины по экрану, то сомнений не возникает, а потому ученики считают это доказанным.

Отличие компьютерного эксперимента от известного школьного (предлагается ученикам вырезать из бумаги треугольники, померить транспортиром углы и найти их сумму) принципиально. Эксперимент с транспортиром содержит конечное число опытов, а конечное число опытов в математике не убеждает – контрпримеры хорошо известны. Компьютер же имитирует бесконечное число опытов, потому результаты их создают в сознании (подчёркиваю – психологически!) некий континуум. А континуум однозначных результатов отметает сомнение.



...сумма углов треугольника равна 180°, как ни гоняй его вершины...

Я однажды выслушал возражение этой позиции, которое состояло в следующем. «Но ведь экран состоит из пикселей, а это конечное множество, поэтому нельзя говорить, что мы имеем континуум возможностей!» Однако я говорю не о физическом явлении, а о психологическом состоянии. Происходящее на экране компьютера воспринимается как непрерывное множество состояний. Здесь полная аналогия с тем, что происходит в кинотеатре. Мы знаем, что исходные изображения дискретны. Но когда показывают киноплёнку со скоростью 24 кадра в секунду, воспринимаем изображения как нечто непрерывное.

Однако бывает иначе. И в том, что показывает компьютер, возможны сомнения. Если в процессе измерения компьютер (с заданной нами точностью, к примеру, до одного знака после запятой) выдаёт равенство двух величин, то может быть не учтена погрешность измерения, а разница в величинах может быть уже во втором знаке после запятой. Встаёт вопрос: что должен делать в этой ситуации ученик? Откуда он знает, что нужно повышать количество знаков после запятой? Это – трудное место, и руководство учителя необходимо.

К видам ученической интеллектуальной деятельности добавлю проектную деятельность – симбиоз перечисленных выше трёх видов деятельности.

Постулат 5. *Есть два уровня использования компьютера: уровень практика и уровень теоретика.*

Когда физик многократно получает на экране осциллографа одну и ту же кривую, он может её воспринимать как данность, хотя и не вполне понимать, почему она именно такая. Далее он может работать с полученными результатами. Но, если ему потребовалось знать причины появления именно такой кривой, он углубляется в теорию или обращается к теоретику.

Примерно то же самое происходит в школьной математике, если мы используем компьютер. Например. Пусть мы в компьютерном эксперименте обнаружили, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1. Если мы – пользователи, так «поехали дальше» – будем этот результат использовать для решения задач. Но если нас интересует, почему так происходит, мы переходим на уровень теоретика, то есть пытаемся объяснить увиденное.

В школьной геометрии правомерны обе позиции. Выбор позиции – дело учителя.

Постулат 6. *Компьютер может менять не только методику преподавания, но и содержание преподавания.*

Укажу пока только одну возможность. Используя компьютер, можно и даже нужно включать в школьные программы такие сведения, которые доступны именно потому, что существует компьютер. Это прежде всего факты, связанные с динамикой. Сейчас динамика в геометрии (при стандартном её преподавании) исключена. Когда использование компьютера на уроках геометрии будет нормой, курс геометрии изменится в первую очередь за счёт того, что появятся динамические возможности, в частности, использующие Интернет.

О других возможностях изменения программы скажу ниже.

2. КОМПЬЮТЕР В ЗАДАЧНОЙ СИТУАЦИИ

Одна из проблем внедрения компьютера – как вписать использование компьютера в дидактическую и методическую систему, которой придерживается учитель? Это очень непросто – система эта нарабатывается годами, весьма личностная и достаточно консервативная. В частности, появляется вопрос о том, как включить компьютер при организации исследовательской деятельности школьника, хотя бы – как включить компьютер в задачную (геометрическую) ситуацию? И здесь я скажу о той работе, которая сделана совместно с С.Г. Ивановым. Мы предлагаем ряд этапов, который проходит задача, и приводим около 40 задач, на которых эти этапы иллюстрируются.

Первый этап, вводный, – предлагается незамысловатый сюжет. Смысл его появления состоит в следующем. Для учебной деятельности задача предстаёт перед учеником в готовом виде. (Откуда берётся условие? Учитель даёт, в учебнике написано.) А в исследовательской деятельности задача обычно имеет иное происхождение. Либо она отражает какую-то прикладную проблему, либо она является развитием уже имеющихся результатов. Для создания прикладного оттенка и предлагается некий сюжет.

Второй этап – составление геометрической модели. На основе якобы реального сюжета сам ученик создаёт геометрическую его модель. И он уже не спрашивает: «Откуда взялось условие задачи?» Он сам его формулирует. Потому и окончательная постановка вопроса задачи (часто некая гипотеза), и ограничения, которые неминуемо вносит сюжет – дело автора геометрической задачи, то есть ученика, который её решает.

Самостоятельно найденная учеником формулировка собственно геометрической задачи способствует более полному её пониманию.

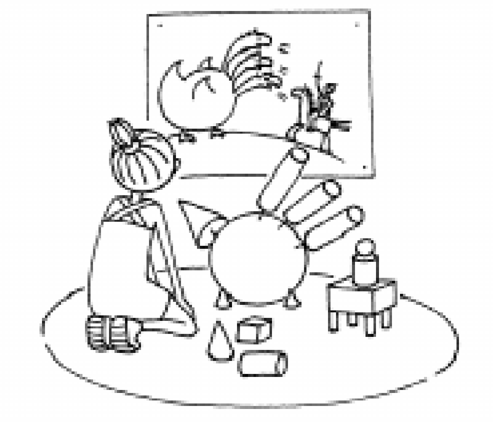
Третий этап – использование эвристических соображений, как это советует делать Д. Пойа (мы называем их наводящими соображениями). Прежде чем перейти к работе с компьютером, чрезвычайно полезны предположения относительно возможного ответа. Ученикам предлагается мысленно представить ситуацию и предугадать возможный результат. Далее рассматриваем различные частные случаи и думаем над их обобщением, или используем аналогии, или рассматриваем задачу без части условия, проверяем обратное утверждение…

В некоторых случаях к наводящим соображениям мы относим рекомендации по решению задачи.

Четвёртый этап – компьютерный эксперимент.

В результате его гипотеза либо появляется, либо корректируется, либо отметается как неверная.

Если гипотеза подтвердилась и мы доверяем компьютеру, то можем считать, что доказательство получено. Не исключено, что эвристика не привела к появлению гипотезы, тогда компьютер становится средством её создания.



На основе якобы реального сюжета сам ученик создаёт геометрическую его модель.

Использование компьютера особенно эффективно для:

а) поиска и конструирования объекта, удовлетворяющего условию,

б) наблюдения за изменяющимися геометрическими объектами и за величинами, с ними связанными.

Пятый этап – рациональное рассуждение.

Предположим, однако, что и после компьютерного эксперимента остаются сомнения в справедливости гипотезы. Например, свойство, которое мы хотим обнаружить, отсутствует – непонятно, доказано ли его отсутствие изучением частных случаев? Другой пример – вычислительный эксперимент, когда неясность возникает из-за наличия погрешностей.

Тогда переходим к поиску рациональных рассуждений, подтверждающих гипотезу. Рациональное рассуждение использует наглядность, симметрии, непрерывность, постоянство, движения, а также соображения, взятые из механики.

Ограничусь такими примерами.

Непрерывность используется в двух ситуациях.

1) Если некоторое свойство фигуры выполняется в какой-то точке, то оно выполняется в малой окрестности этой точки (так называемый метод «малых шевелений»).

2) Если при движении точки по некоторой непрерывной траектории некая величи-

на, связанная с данной фигурой, может быть меньше определённого значения и больше его, то существует такое положение переменной точки, когда искомая величина равна этому значению.

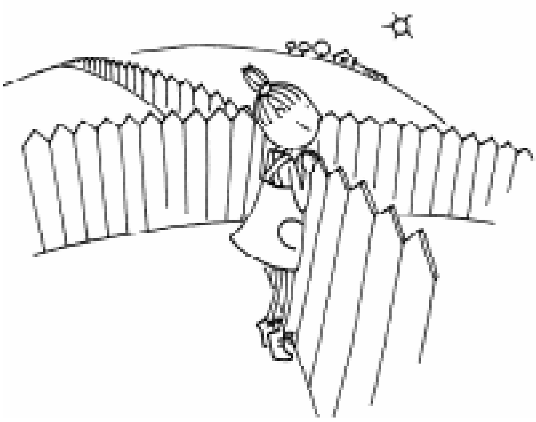
Гипотеза о постоянстве определённой величины, связанной с данной фигурой, возникает тогда, когда эта величина принимает одинаковые значения в трёх разных положениях данной фигуры. В основе этой гипотезы лежит предположение о том, что исследуемая величина задаётся линейной или квадратичной функцией, что чаще всего встречается в геометрии.

В рациональных рассуждениях может использоваться наглядность. Вот пример. Если я нарисую на листе бумаги две пересекающиеся прямые и спрошу, на сколько частей эти две прямые разбивают плоскость, то услышу, что частей – четыре. Убедиться в этом на основе реального эксперимента невозможно – прямая бесконечна. Но я не знаю школьного учебника геометрии, где бы доказывалось это утверждение.

Шестой этап – «дедуктивное доказательство».

Кавычки поставлены потому, что я не нашёл для этого этапа лучшего названия.

Хотя рациональное рассуждение имеет громадную силу как доказательное, «традиционный» учитель считает, что «по-настоящему» доказательство – это когда идут ссылки на аксиомы, определения и теоремы. Но дело не только в учительской позиции.



...на сколько частей эти две прямые разбивают плоскость, ... частей – четыре.

Многовековой опыт обучения математике говорит о необходимости (но и трудности) учительской работы на этом этапе.

Седьмой этап – альтернативное решение.

Разнообразные решения одной и той же задачи помогают установить иные связи между математическими фактами, что способствует лучшему пониманию предмета в целом.

Поиски альтернативного решения – часть критической деятельности, ибо в результате неё появляется сравнение полученных решений, затем их оценка и выбор того из них, которое почему-либо устраивает больше. В геометрии этот этап проявляется особенно ярко, когда мы сравниваем решения синтетические и аналитические.

Восьмой этап – расширение задачи.

Для исследовательской деятельности характерно то, что задача не заканчивается с получением ответа. Это в учебной деятельности – получил ответ в задаче и был таков. В исследовательской деятельности с появлением ответа, можно сказать, всё только начинается. В процессе решения появляются новые мысли, возникают новые вопросы. По этому поводу я рассказываю ученикам историю с Э. Рёзерфордом. Он своему сотруднику – новичку давал некую задачу. И если этот сотрудник приходил затем со словами: «Я решил вашу задачу, какая будет следующая?», Рёзерфорд этого человека увольнял.

Поскольку в исследовательской деятельности решённая задача приводит к новым вопросам, мы предлагаем расширение исходной задачи, точнее два расширения. Первое расширение показывает, что деятельность не заканчивается после получения ответа на поставленный вопрос. Второе расширение (которое в большинстве задач сложнее первого) показывает, что и с первым расширением исследовательская деятельность продолжается.

Появление расширений позволяет к тому же включить ученика в проектную деятельность. В нашем представлении проектная деятельность заключается в следующем. После того как ученик знакомится с неким сюжетом (полученным от учителя, найденным в литературе или созданном самостоятельно), он формулирует соответствующую геометрическую задачу, а затем сам должен пройтись по перечисленным выше этапам.

Возможен чуть другой порядок проекта. Ученику вначале предлагается задача в геометрическом виде, после чего он должен сочинить исходный сюжет, предложить наводящие соображения, сформулировать гипотезу, продумать компьютерный эксперимент, подтвердить полученные результаты рациональными рассуждениями и дедуктивным доказательством, искать альтернативные решения, затем предложить дальнейшие расширения.

Представленная затем работа и является завершённым проектом.

3. РАБОТА С ПРОГРАММОЙ NSPIRE

Возможности этой программы, новой для России, покажу на задаче о наличии центра симметрии у графика функции $y = x + \cos x$.

Сначала программа вывела на экран график этой функции (рис. 1).

Для нахождения центра симметрии у этого графика есть несколько возможностей.

Сначала был выбран «алгебраический» путь (рис. 2). В левом столбце стоит то, что мы вводим сами (здесь и далее). В правом столбце стоит то, что выдаёт программа по нашим командам. Учитывая, что в правом столбце должна стоять удвоенная ордината центра симметрии, видим, что программа выдала координатами центра симметрии точку $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Затем был выбран «геометрический» путь (рис. 3). Сравнивая результаты в левом и правом столбце, видим, что исходную функцию (она в последней строке в правом столбце) программа отождествила с нечётной функцией $x + \sin x$ (рис. 4).

Затем программа выдала два графика. Эта картина показывает, что один из графиков получается из другого наклонным сдвигом. В результате центр симметрии первого графика переходит сдвигом в центр симмет-

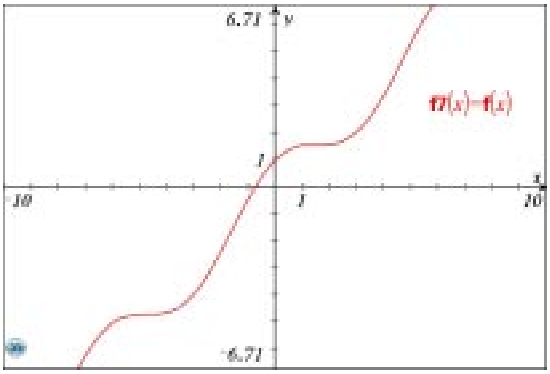


Рис. 1

$f(x):=x+\cos(x)$	*Done*
$f(a+x)+f(a-x)$	$\cos(x-a)+\cos(x+a)+2\cdot a$
$g(x):=f(a+x)+f(a-x)$	*Done*
$g(x)$	$\cos(x-a)+\cos(x+a)+2\cdot a$
$\mathrm{tExpand}(g(x))$	$2\cdot\cos(a)\cdot\cos(x)+2\cdot a$
$\mathrm{solve}(2\cdot\cos(a)=0,a)$	$a=\frac{(2\cdot n1-1)\cdot\pi}{2}$
$g(x)\vert a=\frac{\pi}{2}$	π

Рис. 2

$h(x):=x+\sin(x)$	*Done*
$h(-x)$	$-\sin(x)-x$
$h(x)+h(-x)$	0
$h\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos(x)+x+\frac{\pi}{2}$
$h\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}$	$\cos(x)+x$

Рис. 3

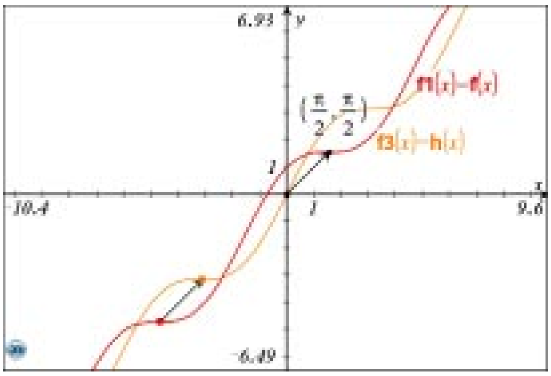


Рис. 4

$\frac{d}{dx}(g(x))$	$^-\sin(x-a)-\sin(x+a)$
$\mathrm{tExpand}\left(\frac{d}{dx}(g(x))\right)$	$^-2\cdot\cos(a)\cdot\sin(x)$
$\mathrm{solve}(^-2\cdot\cos(a)=0,a)$	$a=\frac{(2\cdot n3-1)\cdot\pi}{2}$

Рис. 5

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$^-\cos(x)$
$\mathrm{solve}(^-\cos(x)=0,x)$	$x=\frac{(2\cdot n1-1)\cdot\pi}{2}$

Рис. 6

рии второго графика. Вектор сдвига указан стрелкой. Видны его координаты $-(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (Нумерацию функций программа устанавливает сама.)

Далее был выбран «функциональный» путь (рис. 5). Была найдена производная, упрощена, и затем было найдено условие, при котором она тождественно равна нулю.

Затем была проведена работа со второй производной (рис. 6).

Осталось убедиться в том, что найденные точки являются центрами симметрии. Программа выполняет это задание (рис. 7).

В левом верхнем углу находится движок, с помощью которого переменная точка графика движется по нему.)

В экспериментальной работе с программой Nspire (геометрия, 8 класс, уроки проводились вместе с М.Э. Дворкиным) удалось найти несколько типов подходящих задач, в частности, новых либо по содержанию, либо по использованной методике. Эта программа позволяет работать не только в геометрии, в ней можно проводить алгебраические выкладки, а также работать с функциями.

Перечислю эти типы.

1) *Задачи на поиски экстремума*. Компьютерный эксперимент сопровождается алгебраическими выкладками, а также способами поиска экстремума. Вместо взятия производной (в 8 классе это не известно) ищется на экране такое положение касательной к полученному графику целевой функции, при котором она параллельна оси абсцисс.

2) *Задачи «на наблюдение»*. Наблюдение – чуть ли не основа для проведения исследования, тому много исторических примеров, даже возможно наблюдение за множеством точек. На одном из уроков, мы рассказали о двух опытах, которые проводились физиками, причём за каждый из этих опытов они были удостоены Нобелевской премии.

Первый опыт – это опыт Э. Рёзерфорда. Э. Рёзерфорд в специально поставленном опыте получил на экране картину из некоторого множества точек и на основе полученной картины пришёл к планетарной модели атома (рис. 8).

Второй опыт – это недавний эксперимент Д. Шехтмана. Учёный наблюдал на экране множество точек, и на основе полученной

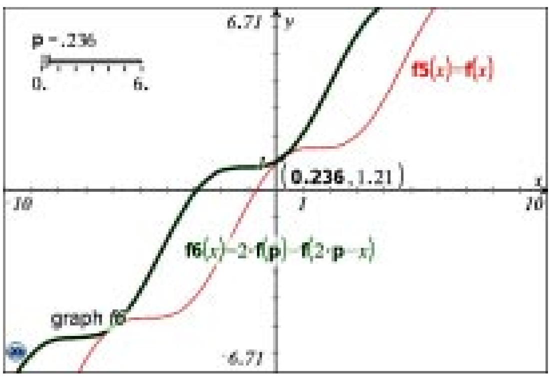


Рис. 7

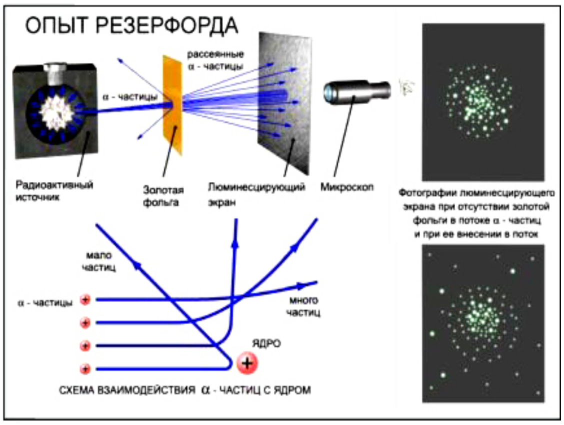


Рис. 8

картины были открыты квазикристаллы. Кроме этого, была открыта икосаэдрическая симметрия, которая раньше считалась невозможной (рис. 9).

Были также упомянуты – в нашем смысле похожие – нобелевские достижения М. Лауэ (открытие дифракции рентгеновских лучей на кристаллах) и Ф. Крика и Д. Уотсона (открытие двойной спирали ДНК).

После того ученикам было сказано: «Видите, наблюдения за множеством точек могут привести к получению Нобелевской премии». Это была шутка, конечно, но после этого ребятам была предложена задача геометрического свойства. Задача такая: «Каждый угол квадрата разделён лучами на три равные части. Эти лучи в квадрате задают некое множество точек пересечения. Вершинами каких многоугольников являются эти точки?» Школьники должны были сказать: «Эти точки – вершины квадрата, а эти – вершины равнобокой трапеции» и т. п. (треугольники мы исключали ввиду очевидности).

Ученики видели иногда такое, что нам не приходило в голову.

Далее требовалось доказательство. Если ученики видели, что среди точек пересечения есть вершины, например, квадрата, то доказывать это утверждение можно было компьютерными средствами.

Можно было проверять равенство сторон и наличие прямого угла.

Можно было доказывать иначе, используя симметрию. К тому времени мы познакомили школьников с элементами симметрии квадрата. Поэтому для доказательства «квадратности» школьники находили у «подозрительно похожего на квадрат» четырёхугольника точку пересечения диагоналей, и дальше рассматривали его поворот относительно этой точки на 90 градусов. Если в результате такого поворота четырёхугольник самосовмещается, значит, получен квадрат. При стандартном доказательстве «квадратности» в 8 классе такой способ невозможен.

В одном из следующих заданий мы взяли двенадцатиугольник и в нём провели все диагонали. Оказалось, что некоторые точки пересечения этих диагоналей лежат на логарифмической спирали.

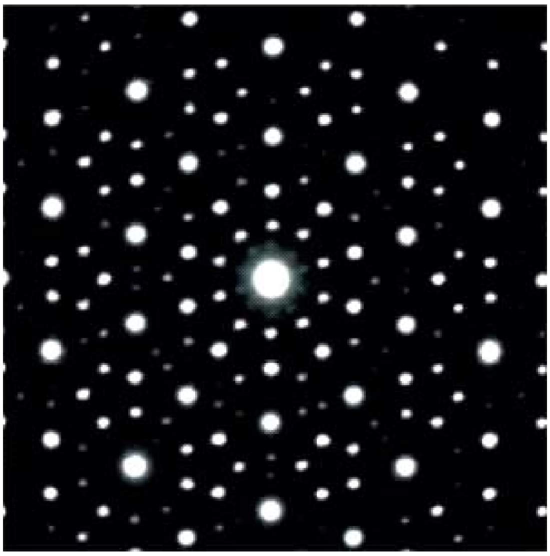


Рис. 9

3) *Задачи на построение*, причём возможны задачи на построение по форме (например, построить равносторонний треугольник) или задачи на построение экстремальной фигуры (например, надо построить траекторию с наименьшей длиной при заданных условиях).

В решении традиционных задачах на построение, присутствует исследование – а сколько решений имеет задача? В приведённой выше задаче получались разные по положению квадраты. Встаёт вопрос: они равны или нет? Если равны, то с точки зрения задачи на построение мы получили одно решение. А если не равны, то получили больше одного решения. Надо было проверить

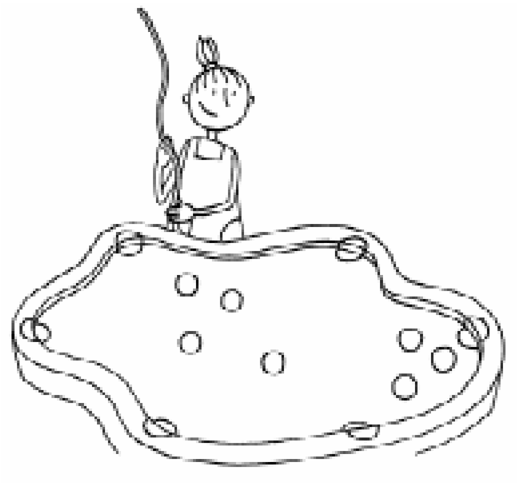
...наблюдения за множеством точек может привести к получению Нобелевской премии».

равенство квадратов, но трудность в том, что нет признаков равенства квадратов, потому как необходимо общее понятие равенства фигур, и его признак – существование движения, которое отображает одну фигуру на вторую, упирается в общее понятие движения. Ничего этого в стандартном курсе 8 класса не изучается. И нет пояснения тому, что квадраты с равными сторонами равны.

И тогда мы предлагаем найти движение (ту или иную симметрию) которое первый квадрат переводит во второй. И если школьники находят с помощью компьютера такое движение, то эти квадраты равны.

Симметрия как частный вид движения изучается нами (согласно программе) в 9 классе. Опережая события, то есть изучение программного материала, мы знакомили учеников с понятием элемента симметрии конкретной фигуры. Например, в квадрате есть оси симметрии и есть центр поворотной симметрии на 90 или на 180 градусов. Наличие их проверялось с помощью компьютера, на экране которого квадрат самосовмещался.

В процессе решения задач на построение был найден любопытный методический ход. Обычно задачи на построение статические – например, построить треугольник, вписанный в окружность. Мы эту задачу интерпретировали иначе: мы искали траектории внутри круга, которые обеспечивают нужную форму. Мы говорили: «Вот точка на окружности, теперь надо найти ещё две точки на окружности, чтобы траектория движения от первой точки ко второй, от второй к третьей и от третьей к первой была, во-первых, замкнутой ломаной, во-вторых, имела нужную форму либо ограничивала экстремальную фигуру по периметру или по площади». В чём достоинство этой задачи? Во-первых, задача из статической стала динамической. Первая точка фиксирована, а вторую точку ученики ставят на окружность и начинают двигать, проверяя выполнение условий. При этом решение задач на построение вписывается в общую структуру задач о бильярдах, которые имеют в математике очень большое содержание. Траектории в прямоугольном бильярде, или в круглом, или в эллиптическом, были предметом серьёзных математических исследований.



Траектории в прямоугольном бильярде, или в круглом, или в эллиптическом, были предметом серьёзных математических исследований.

Задачи на нахождение траектории не всегда бывают простыми. Приведу такой пример. Мы искали в квадрате траекторию из трёх звеньев, которая возвращает точку в первоначальное положение, и траектория имеет форму равностороннего треугольника. Если точку взять в вершине квадрата, то поиски такой траектории труда не составляют. Но если взять точку на стороне квадрата, то это уже не такая простая вещь. Ученики с этим так или иначе были ознакомлены.

4) *Задачи на восстановление фигуры по точкам.* Я приведу простой примеры: на экране был треугольник, мы отметили середины всех его сторон и, оставив только их, убрали с экрана треугольник. Предлагаем ученикам восстановить треугольник по трём серединам его сторон. В так поданной задаче на построение не встаёт вопрос о существовании фигуры, ибо треугольник был в самом начале! Естественно, не встаёт вопрос и о единственности решения

5) *Задачи на максимин.* Разбиралась такая задача: «Торт имеет форму правильного треугольника, играют Малыш и Карлсон. Малыш ставит произвольную точку на торте, а Карлсон делает разрез торта так, чтобы отхватить себе больший кусок торта. Как Малыш должен поставить точку, чтобы обеспечить себе максимально при этих условиях возможный кусок?»

6) *Знакомство с фракталами.* Мы знакомили учеников с построением салфетки Серпинского и снежинки Коха. Предлагалось найти площадь и периметр полученной фигуры.

Поиски новых типов задач продолжаются. В «прицеле» задачи на укладку паркета из разных фигур, исследование свойств фигур, нетрадиционных в школьном курсе (пятиугольник Рейнхарлта) и т. д.

РАБОТА С ПРОГРАММОЙ GEOMETRY EXPRESSIONS

Мы с М.Э. Дворкиным работали с программой Geometry Expressions. Эта программа работает в символьном режиме.

Например, в треугольнике даны три стороны в общем виде, требуется найти длину биссектрисы. Компьютер выдаёт выражение также в общем виде, но непонятно, откуда оно взялось. И тогда ученики, используя программу, ищут на созданном рисунке дополнительную информацию, Они запросили программу, чему равняются длины отрезков, на которые биссектриса разбивает сторону. Компьютер выдал длины этих отрезков опять же в общем виде, и, глядя на полученные длины отрезков, можно заметить, что эти длины относятся так же, как соответствующие стороны. Это был ключ к тому, чтобы получить формулу для длины биссектрисы по трём сторонам треугольника. В итоге школьники с задачей справились. То есть компьютер в этой программе работает как источник получения новой информации в общем виде. Тем самым вопрос о компьютерном доказательстве решается иначе, нежели в программе, которая не работает в символьном режиме.

О «ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ КУХНЕ»

Вопрос, где и как использовать компьютер, тоже существен. Компьютер можно использовать на уроке. Тогда или мы с помощью компьютера поддерживаем текущий материал, или мы ведём какую-то параллельную работу (например, при повторении), или если мы ищем связи материала, который мы проходим сейчас, с тем материалом, который был раньше, или занимаемся материалом, который в данный момент не проходится в школе. Например, в 8 классе, знакомя учеников с элементами симметрии фигуры, мы подводили их к понятию группы симметрий. И мы знакомили школьников, как было сказано, с логарифмической спиралью, с фракталами.

Компьютер можно использовать на факультативе, например, сейчас в нашей школе идёт совершенно замечательный факультатив, который называется «Эстетическая геометрия». На этом факультативе, который ведёт Р.Р. Пименов, главная фигура, которая изучается, – это окружность. Рассматривается инверсия окружности и композиция инверсий. При этом получаются удивительные фигуры.

Если говорить о педагогической «кухне», то ученики представляют свои решения в виде word-файла, сопровождая его рисунками, взятыми из программы. Видно, сколько усердия они проявляют, чтобы решить задачу и оформить её в надлежащем виде, сколько наблюдательности они порой проявляют. Например, в одной из работ о точках пересечения одна моя ученица заметила мальтийский крест, который мне в голову не приходил.

Работа с компьютером открывает новые интересные возможности для творчества как школьнику, так и учителю.

Рыжик Валерий Идельевич,
кандидат педагогических наук,
заслуженный учитель РФ,
учитель Санкт-Петербургского лицея «Физико-техническая школа».